TakiAcademy - www.takiacademy.com ★★★★★★★★★ Mathématiques ★★★★★★★★★ Prof : Abbes Amor – Lycée Pilote Monastir	**Section : 4éme Sc-Exp** **Révision Bac 2019 : Sujet n° 03** **Durée : 3 H 00 mn** — **Date : 22/05/2019**

EXERCICE N°1 : 4 points

Une classe de 4ème année SCIENCES EXPRIMENTALES d'un lycée compte 20 élèves dont 5 garçons.

Les filles préparent leurs exercices dans 80% des cas.

Ceci contrairement aux garçons qui le font dans 40% des cas.

1) A chaque séance de cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard 1 élève.

On note les évènements : **A** « L'élève est une fille » et **S** « L'élève a préparé ses exercices »

a) Dresser un arbre pondéré décrivant cette situation. **b)** Montrer que $p(S)=0.7$.

c) L'élève interrogé a préparé ses exercices, quelle est la probabilité qu'il soit un garçon.

2) L'interrogation prend pour le professeur entre 5 et 15 minutes donc sa durée est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[5\,;\,15]$.

a) Déterminer la probabilité que le professeur prenne plus que 8 minutes dans son interrogation.

b) Déterminer la probabilité que le professeur prenne exactement 10 minutes dans son interrogation.

c) Le professeur a pris plus que 8 minutes dans son interrogation, quelle est la probabilité qu'il y ait pris moins de 10 minutes.

3) Le professeur a proposé 10 séances de cours donc il a fait 10 interrogations.

En tenant compte qu'un même élève peut être interrogé plusieurs fois, on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où le professeur a interrogé un élève qui a préparé ses exercices. **a)** Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la probabilité d'avoir au moins deux fois un élève qui a préparé ses exercices.

EXERCICE N°2 : 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. m étant un paramètre réel.

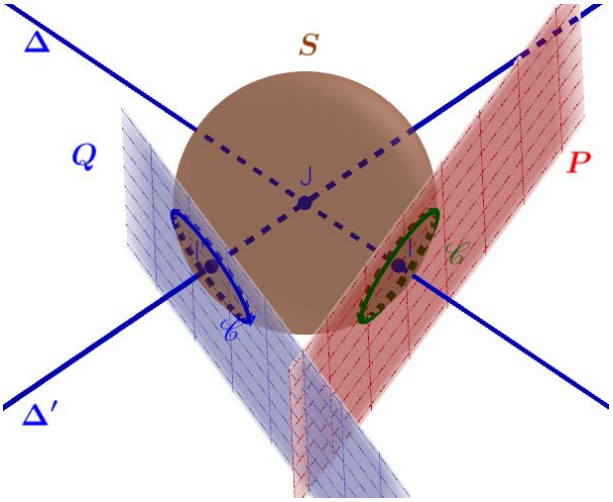
On considère S' : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z+2=0$ et les plans $Q: x-y+z+3=0$ et $P_m: mx-my-z+m=0$

A/ 1) Montrer que S' est une sphère dont on précisera le centre J et le rayon R.

2) Montrer que P_2 coupe S' selon un cercle Γ dont on déterminera le centre H et le rayon r.

Dans toute la suite on prend : m = 1 et on pose $P=P_1$ et $J(-1,1,2)$.

B/ Soient les points $I(0,0,1)$ et $I'(-2,2,1)$, le cercle C de centre I et de rayon 1 contenu dans le plan P, et le cercle C' de centre I' et de rayon 1 contenu dans le plan Q.
On désigne par Δ l'axe du cercle C et par Δ' l'axe du cercle C'.
On se propose de démontrer qu'il existe une sphère S contenant C et C '.



1) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.

2) Montrer que les droites Δ et Δ' sont sécantes au point $J(-1,1,2)$.

3) Soit *N* un point de C et N' un point de C '.
Montrer que : $NJ = N'J$.

4) Déduire qu'il existe une sphère S contenant C et C ' dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°3 : 4 points

Soit U la suite définie sur *IN* par $U_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t}\,dt$ et $U_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$, $n \geq 1$.

1) Calculer U_0.

2) a) Vérifier que pour tout $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{t-\frac{1}{2}}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{3}{2(1+t)^2}$. **b)** Calculer alors U_1.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} + U_n$

b) Calculer alors U_2 et U_3.

4) Soit *V* la suite définie sur IN^* par $V_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t-\frac{1}{2}\right)^n dt$.

a) Calculer V_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq U_{2n} \leq V_{2n}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n}$. **d)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N°4 : 7 points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$. **b)** Dresser le tableau de variation de *f*.

c) Montrer que *f* réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans *IR* l'équation $x^2 = x+1$.

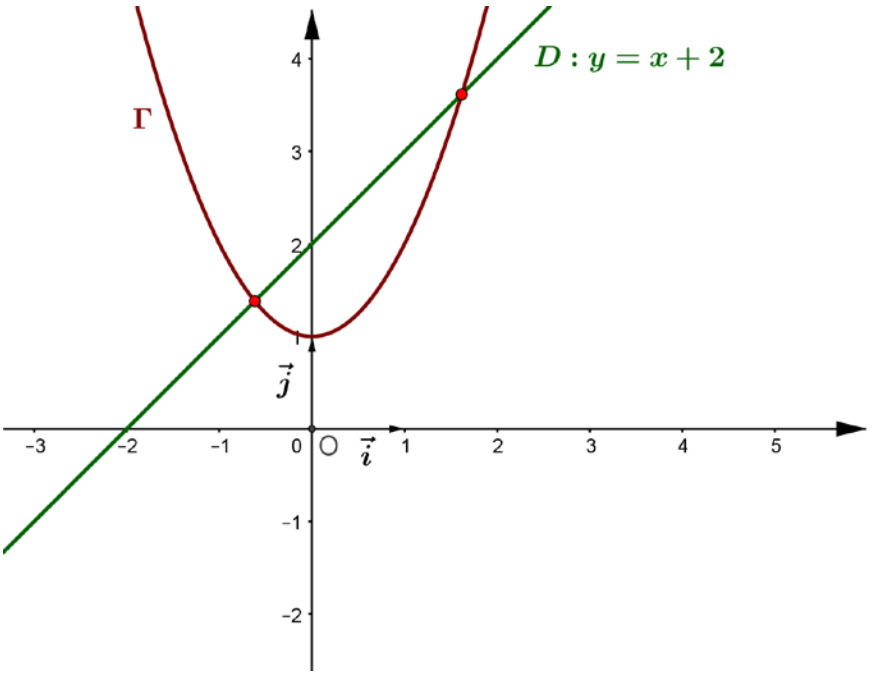
b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point *A* d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente *T* à (C_f) au point *A* est $y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente *T* passe par le point $B\left(0,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite *D* d'équation $y=x+2$ et la courbe Γ de la fonction $x \mapsto x^2+1$.



a) Construire les points A et *B*. **b)** Construire la tangente *T* et tracer la courbe (C_f).

B) Soit *n* un entier naturel non nul. On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x)=\int_1^x f(t^n)dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x)=x f(x^n)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-n(x-1)-\int_1^x \dfrac{n}{1+t^n}\,dt$.

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \dfrac{1}{1+t^n}dt$. **a)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$

b) En utilisant **B)1°)a)** , Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)=0$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.